SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Giovanni Dore

REGOLARITA' MASSIMALE PER PROBLEMI DI CAUCHY IN SPAZI DI BANACH

30 aprile 1992

1 Introduzione

In questo seminario esporrò alcuni risultati sulla regolarità massimale in L^p per un problema di Cauchy per una equazione differenziale ordinaria lineare non omogenea in uno spazio di Banach.

Siano X uno spazio di Banach complesso, $p \in [1, +\infty]$ e $T \in \mathbf{R}^+$ oppure $T = +\infty$. Consideriamo A operatore lineare con dominio e codominio contenuti in X.

Diciamo che c'è regolarità massimale in $L^p([0,T[\,,X)$ per il problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & t \in [0,T[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

se per ogni $f \in L^p([0,T[\,,X)$ esiste una e una sola soluzione u di $(*)$ tale che

1) u è derivabile nel senso delle distribuzioni

2) per quasi ogni $t \in [0,T[$ $u(t) \in \mathcal{D}(A)$

3) $u, u', Au \in L^p([0,T[\,,X)$

ed inoltre u, u', Au dipendono con continuità da f nella norma L^p.

Tale unica soluzione verrà indicata con $\mathcal{M}f$ (o con $\mathcal{M}_T f$ quando ciò sarà necessario per evitare ambiguità).

2 Prime conseguenze della regolarità

Teorema 1 *Se c'è regolarità massimale in* $L^p([0,T[\,,X)$ *per il problema di Cauchy* $(*)$ *allora l'operatore* A *è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione in $\mathcal{D}(A)$ convergente a x e tale che Ax_n converge a y.

Scelta $\phi \in W^{1,p}([0,T[\,,\mathbf{C})$ (diversa dalla funzione nulla) e tale che $\phi(0) = 0$, poniamo

$$\psi_n = \phi' x_n - \phi A x_n$$

allora è

$$\phi x_n = \mathcal{M}\psi_n \,.$$

Visto che $\phi x_n \to \phi x$ e $\psi_n \to \phi' x - \phi y$, tenuto conto della continuità di $\mathcal{M}$ si ha $\phi x = \mathcal{M}(\phi' x - \phi y)$ da cui segue che $x \in \mathcal{D}(A)$ e $Ax = y$, dunque A è chiuso.

Teorema 2 *Se c'è regolarità massimale in* $L^p([0,T[\,,X)$ *con* $T < +\infty$ *per il problema di Cauchy* $(*)$ *allora* $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ *c'è regolarità massimale in* $L^p([0,T[\,,X)$ *per il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = (A+\lambda)u(t) + f(t) & t \in [0,T[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^p([0,T[,X)$. Posto $g(t) = e^{-\lambda t}f(t)$, la funzione $t \mapsto e^{\lambda t}(\mathcal{M}g)(t)$ è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} u'(t) = (A+\lambda)u(t) + f(t) & t \in [0,T[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi c'è regolarità massimale.

Questo teorema, sfruttando ciò che verrà dimostrato in seguito, è valido anche nel caso di $L^p([0,+\infty[,X)$ purchè $Re\,\lambda$ sia non positiva.

Teorema 3 *Se c'è regolarità massimale in* $L^p([0,+\infty[,X)$ *per il problema di Cauchy* $(*)$ *allora* $\forall\lambda \in \mathbf{R}^+$ *c'è regolarità massimale in* $L^p([0,+\infty[,X)$ *per il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda A u(t) + f(t) & t \in [0,+\infty[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $f \in L^p([0,+\infty[,X)$. Poniamo $g(t) = \frac{1}{\lambda}f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$. Allora la funzione $t \mapsto (\mathcal{M}g)(\lambda t)$ è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda A u(t) + f(t) & t \in [0,+\infty[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Questo teorema, sfruttando ciò che sarà dimostrato in seguito, è valido anche nel caso di intervallo limitato

3 Risolvente

Vediamo ora quali informazioni sul risolvente dell'operatore A si ottengono dalla regolarità.

Teorema 4 *Se c'è regolarità massimale in* $L^p([0,+\infty[,X)$ *per il problema di Cauchy* $(*)$ *allora*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : Re\,\lambda \geq 0\} \subseteq \rho(A)$$

e esiste $C \in \mathbf{R}^+$ *tale che*

$$Re\,\lambda \geq 0 \implies \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{1+|\lambda|}\,.$$

Dimostrazione. La dimostrazione viene fatta costruendo esplicitamente l'operatore risolvente se $Re\,\lambda > 0$ e stimandone la norma; tale norma si mantiene limitata se $Re\,\lambda$ tende a 0 e quindi anche l'asse immaginario appartiene al risolvente.

Per $\lambda \in \mathbf{C}$ con $Re\,\lambda > 0$ poniamo

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} & t \in \left[0, \frac{1}{Re\,\lambda}\right] \\ 0 & t \in \left]\frac{1}{Re\,\lambda}, +\infty\right[\end{cases}$$

e per $x \in X$ sia

$$R_\lambda x = Re\,\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\mathcal{M}(f_\lambda x))(t)\,dt\,.$$

R_λ è l'inverso di $\lambda - A$.

Infatti per ipotesi $\mathcal{M}(f_\lambda x)$ appartiene a $L^p([0,+\infty[\,,\mathcal{D}(A))$ e quindi $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\begin{aligned} AR_\lambda x &= Re\,\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} A(\mathcal{M}(f_\lambda x))(t)\,dt \\ &= Re\,\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\mathcal{M}(f_\lambda x))'(t)\,dt - Re\,\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f_\lambda(t) x\,dt \\ &= -Re\,\lambda\,(\mathcal{M}(f_\lambda x))(0) + \lambda Re\,\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\mathcal{M}(f_\lambda x))(t)\,dt - Re\,\lambda \int_0^{\frac{1}{Re\,\lambda}} x\,dt \\ &= \lambda R_\lambda x - x \end{aligned}$$

perciò R_λ è una inversa destra di $\lambda - A$.

La dimostrazione che è anche una inversa sinistra presenta solo qualche complicazione tecnica.

Inoltre, con le ovvie modifiche se $p = 1$ o $p = +\infty$,

$$\begin{aligned} \|R_\lambda x\| &= \left\| Re\,\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\mathcal{M}(f_\lambda x))(t)\,dt \right\| \\ &\le Re\,\lambda \int_0^{+\infty} e^{-Re\,\lambda t}\|(\mathcal{M}(f_\lambda x))(t)\|\,dt \\ &\le Re\,\lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{-Re\,\lambda t p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}} \|\mathcal{M}(f_\lambda x)\|_{L^p} \\ &\le Re\,\lambda \left(\frac{1}{Re\,\lambda\, p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|\mathcal{M}\| \left(\int_0^{\frac{1}{Re\,\lambda}} e^{Re\,\lambda t p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \|x\| \\ &= Re\,\lambda \left(\frac{1}{Re\,\lambda\, p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|\mathcal{M}\| \left(\frac{e^p - 1}{Re\,\lambda\, p}\right)^{\frac{1}{p}} \|x\| \\ &= C\|x\| \end{aligned}$$

con C che dipende da $\|\mathcal{M}\|$ e p ma non da λ.

Ripetendo l'argomento a partire dall'uguaglianza

$$R_\lambda x = \frac{Re\,\lambda}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}(\mathcal{M}(f_\lambda x))'(t)\,dt$$

si ottiene la stima

$$\|R_\lambda x\| \le \frac{C}{|\lambda|}\|x\|$$

e dunque $\|R_\lambda\| \geq \dfrac{C_1}{1+|\lambda|}$.

Da questo teorema segue immediatamente che A genera un semigruppo analitico, con norma che decresce esponenzialmente all'infinito; tale semigruppo è fortemente continuo in 0 se e solo se il dominio dell'operatore è denso (vedi [3]).

Nel caso di intervallo limitato si ottiene invece:

Teorema 5 *Se c'è regolarità massimale per* $(*)$ *su un intervallo limitato, allora esiste* $\delta \in \mathbf{R}$ *tale che*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : Re\,\lambda \geq \delta\} \subseteq \rho(A)$$

e esiste $C \in \mathbf{R}^+$ *tale che*

$$Re\,\lambda \geq \delta \implies \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{1+|\lambda-\delta|}$$

Dimostrazione. Per $\lambda \in \mathbf{C}$ con $Re\,\lambda \geq \frac{1}{T}$ poniamo

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} & t \in \left[0, \frac{1}{Re\,\lambda}\right] \\ 0 & t \in \left]\frac{1}{Re\,\lambda}, T\right[\end{cases}$$

e per $x \in X$ sia

$$R_\lambda x = Re\,\lambda \int_0^T e^{-\lambda t}(\mathcal{M}(f_\lambda x))(t)\,dt\,.$$

Dal fatto che $\mathcal{M}(f_\lambda x)$ appartiene a $L^p([0,T[\,,\mathcal{D}(A))$ segue che $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\begin{aligned} AR_\lambda x &= Re\,\lambda \int_0^T e^{-\lambda t} A(\mathcal{M}(f_\lambda x))(t)\,dt \\ &= Re\,\lambda \int_0^T e^{-\lambda t}(\mathcal{M}(f_\lambda x))'(t)\,dt - Re\,\lambda \int_0^T e^{-\lambda t} f_\lambda(t) x\,dt \\ &= \lambda R_\lambda x + Re\,\lambda\, e^{-\lambda T}(\mathcal{M}(f_\lambda x))(T) - Re\,\lambda \int_0^{\frac{1}{Re\,\lambda}} x\,dt \\ &= \lambda R_\lambda x + Re\,\lambda\, e^{-\lambda T}(\mathcal{M}(f_\lambda x))(T) - x \end{aligned}$$

dunque

$$(\lambda - A)R_\lambda x = x - Re\,\lambda\, e^{-\lambda T}(\mathcal{M}(f_\lambda x))(T)\,.$$

Posto $Q_\lambda x = Re\,\lambda\, e^{-\lambda T}(\mathcal{M}(f_\lambda x))(T)$, indicando con C la norma dell'operatore che a f associa $(\mathcal{M}f)'$, si ha

$$\begin{aligned} \|Q_\lambda x\| &\leq Re\,\lambda\, e^{-Re\,\lambda T} \left\| \int_0^T (\mathcal{M}(f_\lambda x))'(t)\,dt \right\| \\ &\leq Re\,\lambda\, e^{-Re\,\lambda T} T^{\frac{1}{p'}} \|(\mathcal{M}(f_\lambda x))'\|_{L^p} \\ &\leq Re\,\lambda\, e^{-Re\,\lambda T} T^{\frac{1}{p'}} C \|f_\lambda\|_{L^p} \|x\| \\ &= Re\,\lambda\, e^{-Re\,\lambda T} T^{\frac{1}{p'}} C \left(\frac{e^p - 1}{Re\,\lambda\, p}\right)^{\frac{1}{p}} \|x\| \\ &= C T^{\frac{1}{p'}} (e^p - 1)^{\frac{1}{p}} p^{-\frac{1}{p}} (Re\,\lambda)^{\frac{1}{p'}} e^{-Re\,\lambda T} \|x\| \end{aligned}$$

Si può quindi trovare $\delta \geq T$ tale che $Re\,\lambda \geq \delta \implies \|Q_\lambda\| \leq \frac{1}{2}$, cosicchè per tali λ l'operatore $1 - Q_\lambda$ è invertibile e $\|(1 - Q_\lambda)^{-1}\| \leq 2$, quindi $R_\lambda(1 - Q_\lambda)^{-1}$ è un inverso destro di $\lambda - A$,. In modo analogo si dimostra che esiste anche un inverso sinistro.

Inoltre:

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \|(1 - Q_\lambda)^{-1}\| \|R_\lambda\| \leq 2\|R_\lambda\|$$

e $\|R_\lambda\|$ si stima in modo simile a quanto fatto nel teorema precedente.

4 Cambiamento di intervallo

Vedremo ora che la regolarità massimale per il problema di Cauchy $(*)$ non dipende dall'intervallo scelto.

Teorema 6 *Se c'è regolarità massimale in* $L^p([0, +\infty[, X)$ *per il problema di Cauchy* $(*)$ *allora* $\forall T \in \mathbf{R}^+$ *c'è regolarità massimale in* $L^p([0, T[, X)$

Dimostrazione. La unicità della soluzione per il problema $(*)$ sull'intervallo $[0, T[$ segue dal fatto che l'operatore A genera un semigruppo.

Se $f \in L^p([0, T[, X)$ indichiamo con $\tilde{f}$ il prolungamento di f a $[0, +\infty[$ che vale 0 fuori da $[0, T[$. Allora la restrizione di $\mathcal{M}_\infty \tilde{f}$ a $[0, T[$ è la soluzione di $(*)$ cercata.

Ovviamente tale soluzione dipende con continuità da f.

La dimostrazione del teorema seguente è essenzialmente dovuta a T. Kato.

Teorema 7 *Se c'è regolarità massimale in* $L^p([0, T[, X)$ *per il problema di Cauchy* $(*)$ *e esistono* $M, m \in \mathbf{R}^+$ *tali che* $\|e^{tA}\| \leq Me^{-mt}$ *allora c'è regolarità massimale in* $L^p([0, +\infty[, X)$.

Dimostrazione. La unicità della soluzione su $[0, +\infty[$ è conseguenza del fatto che A genera un semigruppo.

Inoltre se $f \in L^p([0, +\infty[, X)$ ed esiste una soluzione essa sarà:

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds$$

(vedi [1] cap. 2 §1).

Da tale formula e dal fatto che A genera un semigruppo con norma che decresce esponenzialmente, segue che $u \in L^p([0, +\infty[, X)$, u è derivabile e per quasi ogni $t \in \mathbf{R}^+$ $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, perciò resta da dimostrare che Au e u' appartengono a $L^p([0, +\infty[, X)$. Visto che $u' = Au + f$ è comunque sufficiente dimostrare che $Au \in L^p([0, +\infty[, X)$, cioè che se $f \in L^p([0, +\infty[, X)$ allora la funzione $t \mapsto \int_0^t Ae^{(t-s)A} f(s)\, ds$ appartiene a $L^p([0, +\infty[, X)$.

Dalla maggiorazione $\|e^{tA}\| \le Me^{-mt}$ e dalle proprietà dei semigruppi analitici segue che $t \mapsto \|Ae^{tA}\|$ è sommabile su $[T, +\infty[$, dunque $t \mapsto \int_0^{t-T} Ae^{(t-s)A} f(s)\, ds$ è convoluzione di una funzione sommabile e di una funzione L^p e dunque è in L^p.

Resta quindi da valutare

$$\int_0^T \left\| \int_0^t Ae^{(t-s)A} f(s)\, ds \right\|^p dt + \int_T^{+\infty} \left\| \int_{t-T}^t Ae^{(t-s)A} f(s)\, ds \right\|^p dt\,.$$

Per $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ poniamo $f_k = f\chi_{[kT,(k+1)T[}$. La quantità scritta sopra è allora uguale a:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\| \int_0^t Ae^{(t-s)A} f_0(s)\, ds \right\|^p dt + \\
&\qquad \sum_{j=1}^{\infty} \int_{jT}^{(j+1)T} \left\| \int_{jT}^t Ae^{(t-s)A} f_j(s)\, ds + \int_{t-T}^{jT} Ae^{(t-s)A} f_{j-1}(s)\, ds \right\|^p dt \le \\
&2^{p-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_{jT}^{(j+1)T} \left\| \int_{jT}^t Ae^{(t-s)A} f_j(s)\, ds \right\|^p dt + \right. \\
&\qquad \left. \sum_{j=1}^{\infty} \int_{jT}^{(j+1)T} \left\| \int_{t-T}^{jT} Ae^{(t-s)A} f_{j-1}(s)\, ds \right\|^p dt \right) = \\
&2^{p-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_0^T \left\| \int_0^t Ae^{(t-s)A} f_j(s + jT)\, ds \right\|^p dt + \right. \\
&\qquad \left. \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \left\| \int_0^{T-t} Ae^{(t+s)A} f_{j-1}(jT - s)\, ds \right\|^p dt \right)
\end{aligned}$$

La prima sommatoria, visto che si ha regolarità su $[0, T[$, si maggiora con

$$C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{L^p}^p$$

mentre la seconda si maggiora con

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_0^T \|Ae^{(t+s)A} f_{j-1}(jT - s)\|\, ds \right)^p dt$$

ma, per le proprietà dei semigruppi analitici, esiste C_2 tale che $\forall t, s \in [0, T]$ $\|Ae^{(t+s)A}\| \le C_2 (t + s)^{-1}$ e il nucleo $(t + s)^{-1}$ definisce un operatore limitato in $L^p([0, T[, \mathbf{R})$, dunque l'ultimo termine è maggiorato da

$$C_3 \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{j-1}\|_{L^p}^p$$

Si può quindi concludere che

$$\int_0^T \left\| \int_0^t Ae^{(t-s)A} f(s)\, ds \right\|^p dt + \int_T^{+\infty} \left\| \int_{t-T}^t Ae^{(t-s)A} f(s)\, ds \right\|^p dt \leq$$

$$C \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{L^p}^p = C\|f\|_{L^p}^p$$

visto che le f_j hanno supporto disgiunto.

5 Perturbazione

Per ottenere risultati di perturbazione è utile considerare il problema di Cauchy $(*)$ come un problema di invertibilità della somma di due operatori.

Sia quindi $\mathcal{A}$ l'operatore in $L^p([0,T[\,,X)$ con dominio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = L^p([0,T[\,,\mathcal{D}(A))$$

tale che

$$(\mathcal{A}f)(t) = A(f(t))$$

e D_t l'operatore in $L^p([0,T[\,,X)$ con dominio

$$\mathcal{D}(D_t) = \{u \in W^{1,p}([0,T[\,,X) : u(0) = 0\}$$

tale che

$$D_t u = u'$$

Allora si ha regolarità massimale in $L^p([0,T[\,,X)$ per $(*)$ se e solo se l'operatore $D_t - \mathcal{A}$ (con dominio $\mathcal{D}(D_t) \cap \mathcal{D}(\mathcal{A})$) è invertibile (da cui in particolare segue che è chiuso). L'inverso è evidentemente l'operatore indicato con $\mathcal{M}$.

Teoremi visti in precedenza garantiscono che, nel caso in cui sia $T < +\infty$, se tale operatore è invertibile allora ha spettro vuoto.

Teorema 8 *Sia A un operatore tale che si ha regolarità massimale in $L^p([0,T[\,,X)$ per $(*)$.*

Sia B un operatore in X con $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e tale che esistono $a, b \in \mathbf{R}^+$

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \qquad \|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \, .$$

Se $a\|\mathcal{M}\| + b\|\mathcal{A}\mathcal{M}\| < 1$ allora si ha regolarità massimale per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + Bu(t) + f(t) & t \in [0,T[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. La dimostrazione sfrutta un risultato classico sull'invertibiltà di operatori perturbati, vedi [2] teor. IV.1.16.

Infatti, indicato con $\mathcal{B}$ l'operatore in $L^p([0,T[\,,X)$ tale che

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) = L^p([0,T[\,,\mathcal{D}(B))$$

$$(\mathcal{B}f)(t) = B(f(t))$$

dalle ipotesi su B segue che

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{D}(D_t - \mathcal{A})$$

e $\forall x \in \mathcal{D}(D_t - \mathcal{A})$ si ha

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}x\| &\leq a\|x\| + b\|\mathcal{A}x\| \\ &= a\|x\| + b\|\mathcal{A}\mathcal{M}(D_t - \mathcal{A})x\| \\ &\leq a\|x\| + b\|\mathcal{A}\mathcal{M}\|\|(D_t - \mathcal{A})x\| \end{aligned}$$

quindi $\mathcal{B}$ è relativamente limitato rispetto a $D_t - \mathcal{A}$ e se a e b soddisfano la ipotesi si ha la invertibilità di $D_t - \mathcal{A} - \mathcal{B}$ e quindi la tesi del teorema.

Da questo teorema si può ricavare, sfruttando le proprietà degli spazi di interpolazione e la decrescenza del risolvente di A, il seguente:

Teorema 9 *Sia $T < +\infty$. Sia A un operatore tale che si ha regolarità massimale in $L^p([0,T[\,,X)$ per $(*)$. Sia B un operatore chiuso in X. Supponiamo che esistano $\alpha \in\,]0,1[$ e $q \in [1,+\infty]$ tali che lo spazio di interpolazione $(X,\mathcal{D}(A))_{\alpha,q}$ è contenuto, con immersione continua, in $\mathcal{D}(B)$.*

Allora si ha regolarità massimale in $L^p([0,T[\,;X)$ per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + Bu(t) + f(t) & t \in [0,T[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che esiste un $\lambda \in \mathbf{R}^+$ tale che l'operatore $D_t - \mathcal{A} - \mathcal{B} + \lambda$ è invertibile.

Visto che la soluzione di

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) - \lambda u(t) + f(t) & t \in [0,T[\\ u(0) = 0 \end{cases}$$

è

$$\int_0^t e^{(t-s)(A-\lambda)} f(s)\, ds$$

esiste $C_1 \in \mathbf{R}^+$ tale che

$$\forall\lambda \in \mathbf{R}^+ \quad \|(D_t - \mathcal{A} + \lambda)^{-1}\| \leq C_1\lambda^{-1}, \quad \|(\mathcal{A} - \lambda)(D_t - \mathcal{A} + \lambda)^{-1}\| \leq C_1\,.$$

Dal fatto che $(X, \mathcal{D}(A))_{\alpha,q}$ è immerso con continuità in $\mathcal{D}(B)$ segue la esistenza di $C_2 \in \mathbf{R}^+$ tale che

$$\forall x \in (X, \mathcal{D}(A))_{\alpha,q} \quad \|Bx\| \leq C_2 \|x\|_{(X,\mathcal{D}(A))_{\alpha,q}} .$$

Per le proprietà degli spazi di interpolazione ([4] 1.3.3) esiste $C_3 \in \mathbf{R}^+$ tale che

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad \|x\|_{(X,\mathcal{D}(A))_{\alpha,q}} \leq C_3 \|x\|^{1-\alpha} \|Ax\|^{\alpha}$$

e si può dimostrare che quest'ultima quantità è minore o uguale di

$$C_3 \left((1-\alpha)\tau^{\alpha} \|x\| + \alpha \tau^{\alpha-1} \|Ax\| \right) \leq$$

$$C_3 \left((1-\alpha)\tau^{\alpha} \|x\| + \alpha \tau^{\alpha-1} \|A(A-\lambda)^{-1}\| \|(A-\lambda)x\| \right)$$

qualunque sia $\tau \in \mathbf{R}^+$.

Dunque vale la stima del teorema precedente con $A - \lambda$ al posto di A e

$$\begin{aligned} a &= C_2 C_3 (1-\alpha)\tau^{\alpha} \\ b &= C_2 C_3 \alpha \tau^{\alpha-1} \|A(A-\lambda)^{-1}\| . \end{aligned}$$

D'altra parte se $\lambda \in \mathbf{R}^+$ allora, viste le stime sul risolvente di A, è:

$$\begin{aligned} \|Bx\| &\leq a\|x\| + b\|Ax\| \\ &\leq a\|x\| + b\|A(A-\lambda)^{-1}\| \|(A-\lambda)x\| \\ &\leq a\|x\| + bC_4 \|(A-\lambda)x\| \end{aligned}$$

e la condizione per applicare il teorema precedente diventa:

$$a\|(D_t - \mathcal{A} + \lambda)^{-1}\| + bC_4 \|(\mathcal{A} - \lambda)(D_t - \mathcal{A} + \lambda)^{-1}\| < 1 .$$

Tale condizione è soddisfatta se si sceglie τ in modo che $bC_1C_4 < \frac{1}{2}$ e successivamente si sceglie λ in modo che $aC_1\lambda^{-1} < \frac{1}{2}$.

Bibliografia

[1] J. A. Goldstein: *Semigroups of linear operators and applications*; Oxford University Press, New York, 1985.

[2] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1966.

[3] E. Sinestrari: On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions; J. Math. Anal. Appl., **107** (1985), 16–66.

[4] H. Triebel: *Interpolation theory, function spaces, differential operators*; North Holland, Amsterdam New York Oxford, 1978.